





# Computer-Graphik I

## Farben

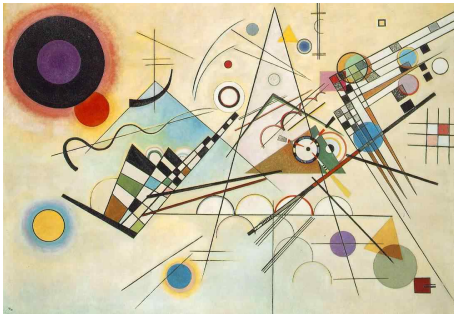


G. Zachmann  
Clausthal University, Germany  
[zach@tu-clausthal.de](mailto:zach@tu-clausthal.de)



*Die Farbe ist ein Mittel, direkten Einfluss auf die Seele auszuüben.  
Die Farbe ist die Taste, das Auge ist der Hammer.  
Die Seele ist das Klavier mit vielen Saiten.  
Der Künstler ist die Hand, die durch diese oder jene Taste  
zweckmäßig die menschliche Seele in vibration bringt.*

Wassily Kandinsky (1866 – 1944)



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 2

## Disclaimer

- Farben sind eine Wissenschaft für sich:
  - Es gibt sehr viele Farbräume
  - Involviert Physik, Biologie / Physiologie, Wahrnehmungspsychologie
    - Oft nicht leicht zu erkennen, in welchem Gebiet man sich gerade bewegt
  - Sehr viele Begriffe
- Fredo Durant:
  - *Color is both quite simple and quite complex*
  - *There are two options to teach color:*
    - *Pretend it all makes sense and it's all simple*
    - *Expose the complexity and arbitrary choices*
    - *Unfortunately, I have chosen the latter ...*
- Vereinfachung hier: keine lichttechn. / photometrischen Größen

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 3

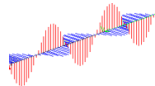
## Literatur

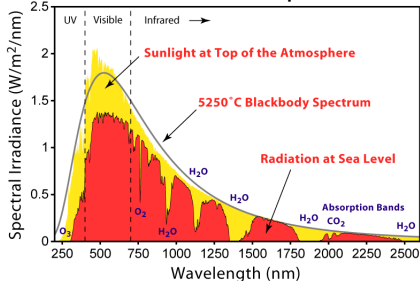
- Foley / van Dam, Peter Shirley, Rogers (s. Homepage der VL)
- Gary W. Meyer: *Tutorial on color science*  
(siehe Link auf der Homepage der Vorlesung)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 4

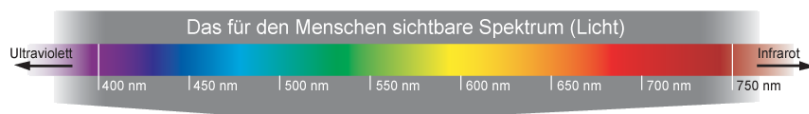
## Was ist Licht?

- **Licht** = elektromagnetische Strahlung / Energie im für den Menschen sichtbaren Spektralbereich: 380 – 780 nm
 





Das für den Menschen sichtbare Spektrum (Licht)

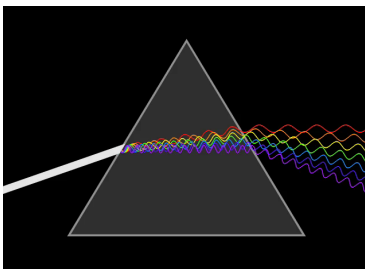
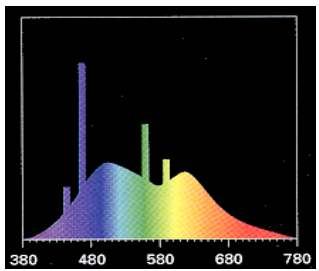


Wellenlänge (m)		Frequenz (Hz)	
1fm	$10^{-15}$	$10^{23}$	
$10^{-14}$	$10^{-14}$	$10^{22}$	
$10^{-13}$	$10^{-13}$	$10^{21}$	(1 Zetta-Hz)
$10^{-12}$	$10^{-12}$	$10^{20}$	
$10^{-11}$	$10^{-11}$	$10^{19}$	
$10^{-10}$	$10^{-10}$	$10^{18}$	(1 Exa-Hz)
$10^{-9}$	$10^{-9}$	$10^{17}$	
$10^{-8}$	$10^{-8}$	$10^{16}$	
$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{15}$	(1 Peta-Hz)
$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{14}$	
$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{13}$	(1 Tera-Hz)
$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{12}$	
$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{11}$	
$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{10}$	(1 Giga-Hz)
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^9$	
$10^0$	$10^0$	$10^8$	(1 Mega-Hz)
$10^1$	$10^1$	$10^7$	
$10^2$	$10^2$	$10^6$	
$10^3$	$10^3$	$10^5$	
$10^4$	$10^4$	$10^4$	
$10^5$	$10^5$	$10^3$	
$10^6$	$10^6$	$10^2$	(1 Kilo-Hz)
$10^7$	$10^7$	$10^1$	
$10^8$	$10^8$	$10^0$	
$10^9$	$10^9$	$10^{-1}$	
$10^{10}$	$10^{10}$	$10^{-2}$	
$10^{11}$	$10^{11}$	$10^{-3}$	
$10^{12}$	$10^{12}$	$10^{-4}$	
$10^{13}$	$10^{13}$	$10^{-5}$	
$10^{14}$	$10^{14}$	$10^{-6}$	
$10^{15}$	$10^{15}$	$10^{-7}$	
$10^{16}$	$10^{16}$	$10^{-8}$	
$10^{17}$	$10^{17}$	$10^{-9}$	
$10^{18}$	$10^{18}$	$10^{-10}$	
$10^{19}$	$10^{19}$	$10^{-11}$	
$10^{20}$	$10^{20}$	$10^{-12}$	
$10^{21}$	$10^{21}$	$10^{-13}$	
$10^{22}$	$10^{22}$	$10^{-14}$	
$10^{23}$	$10^{23}$	$10^{-15}$	

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Farben 5

## Lichtquellen

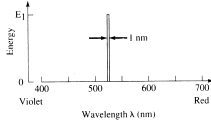
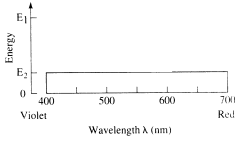
- Licht entsteht durch Emission von elektromagnetischer Strahlung
  - Normalerweise durch hohe Temperatur, z.B.: Sonne, Kerze, schwarzer Strahler, ...
  - Ausnahmen: Fluoreszenz, Laser, ...
- Eine Lichtquelle hat (fast) immer ein komplettes Spektrum:
 

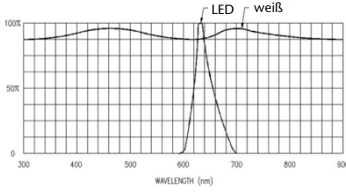



Leuchtstoffröhre

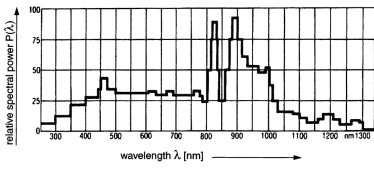
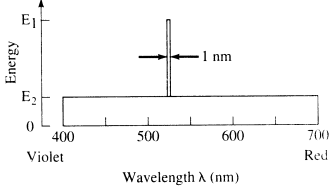
G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Farben 6

### Chromaticity ("Chromatizität")

- Monochromatisches Licht = genau 1 Wellenlänge (Laser)**

- Achromatisches Licht = alle Wellenlängen ungefähr gleich stark → weiß**




G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 7

- Chromatisches Licht: ganzes Spektrum, eine dominante Wellenlänge (farbiges Licht)**


- Wesentliche, beschreibende Charakteristika:**
  - Dominante Wellenlänge = "Farbe", *Hue*
  - Verhältnis  $E_1 / E_2$  = Anteil des weißen Lichtes = Reinheit, *Sättigung, Saturation*
  - Fläche unter der Spektralkurve = Helligkeit = *Intensität, Brightness*

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 8

### Das Licht auf dem Weg ... (das *Reflectance Spectrum*)

The diagram illustrates the process of light reflecting off an object. A person is holding a red apple. A sun icon emits a yellow arrow representing light towards the apple. Three spectral graphs are shown:

- Reflectance Spectrum:** A red line graph showing the reflectance of the apple across the visible spectrum (500-700 nm). The curve is low in the blue and green regions and rises sharply in the red region, reaching a plateau near 1.0.
- Illuminant D65:** A blue line graph showing the spectral power distribution of natural daylight. It has a broad peak in the blue-green region and a secondary peak in the red region. A color bar below the graph shows the visible spectrum.
- Spectral Power Distribution:** A red line graph showing the spectral power distribution of the light reflected from the apple. It is the product of the illuminant and the reflectance spectrum, showing a broad peak in the red region.

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 9

### Neon Lamp


The diagram illustrates the process of light reflecting off an object under a specific illuminant. A person is holding a red apple. A neon lamp icon emits a blue arrow representing light towards the apple. Four spectral graphs are shown:

- Reflectance Spectrum:** A red line graph showing the reflectance of the apple across the visible spectrum (500-700 nm). The curve is low in the blue and green regions and rises sharply in the red region, reaching a plateau near 1.0.
- Illuminant F1:** A blue line graph showing the spectral power distribution of a neon lamp. It consists of several sharp, discrete peaks in the blue and green regions.
- Spectral Power Distribution Under F1:** A red line graph showing the spectral power distribution of the light reflected from the apple under the neon lamp. It shows the discrete peaks of the neon lamp filtered by the apple's reflectance spectrum.
- Spectral Power Distribution Under D65:** A red line graph showing the spectral power distribution of the light reflected from the apple under natural daylight. It is the product of the D65 illuminant and the reflectance spectrum.

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 10

## Warum ist der Wald grün?

- Weil der grüne Teil des Spektrums nicht absorbiert wird:
- Würden Pflanzen alle Wellenlängen gleich gut absorbieren, sähe das so aus:



**A** Absorption spectra of carotenoids, chlorophyll, anthocyanin

**B** Average crown reflectance spectra

**C** Human spectral sensitivity at bright light (Photopic sensitivity)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 11

## Woher kommen die Farben?

- Kennen Sie diese Szene?
  - "There is no spoon":



- Merke: **ES GIBT KEINE FARBEN!**
  - In der physikalischen Welt gibt es nur Spektren!
  - Farben entstehen erst im Auge bzw. im Kopf!



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 12

## Das Auge

The diagram illustrates the visual pathway. Light enters the eye through the cornea and lens, hitting the retina. The retina contains photoreceptors (rods and cones) and various types of cells (bipolar, ganglion, horizontal, and amacrine). The optic nerve carries signals from the retina to the Lateral Geniculate Nucleus (LGN) in the brain, which then projects to the Visual Cortex. The distribution of rods and cones is shown in a separate section, highlighting the high density of cones in the fovea.

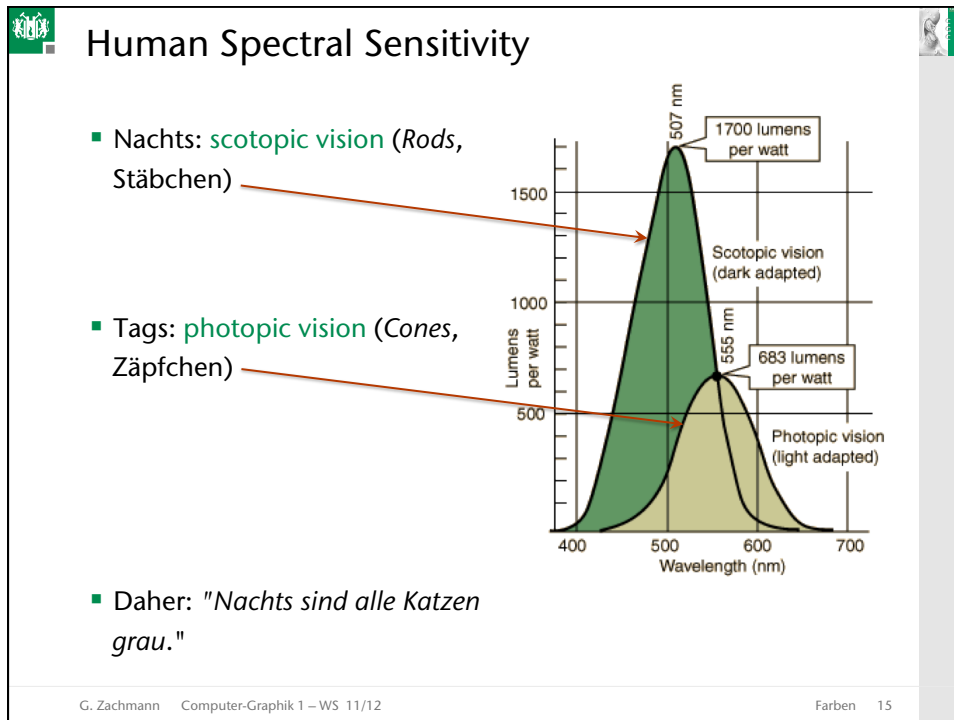
G. Zachmann    Computer-Graphik 1 – WS 11/12    Farben 13

- Das räumliche Auflösungsvermögen nimmt zum Rand der Netzhaut ab
- Wenn man ein Bild so vorverzerrt, dass die lokale Auflösung der im Auge entspricht, sieht es ungefähr so aus:

Visual acuity (Spatial frequency)  
Eccentricity (deg)

Density in thousands per square mm  
Angular separation from fovea (degrees)

G. Zachmann    Computer-Graphik 1 – WS 11/12    Farben 14



## Einige (erstaunliche) Unterschiede zwischen Rods und Cones

The rods are more numerous of the photoreceptors, some 120 million, and are the more sensitive than the cones. However, they are not sensitive to color. They are responsible for our dark-adapted, or scotopic, vision. The rods are incredibly efficient photoreceptors. More than one thousand times as sensitive as the cones, they can reportedly be triggered by individual photons under optimal conditions. The optimum dark-adapted vision is obtained only after a considerable period of darkness, say 30 minutes or longer, because the rod adaption process is much slower than that of the cones. The rod sensitivity is shifted toward shorter wavelengths compared to daylight vision, accounting for the growing apparent brightness of green leaves in twilight. While the visual acuity or visual resolution is much better with the cones, the rods are better motion sensors. Since the rods predominate in the peripheral vision, that peripheral vision is more light sensitive, enabling you to see dimmer objects in your peripheral vision. If you see a dim star in your peripheral vision, it may disappear when you look at it directly since you are then moving the image onto the cone-rich fovea region which is less light sensitive. You can detect motion better with your peripheral vision, since it is primarily rod vision.

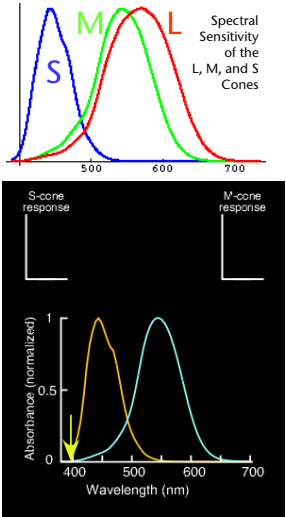
[Hecht, Eugene: *Optics*. 2<sup>nd</sup> ed, Addison Wesley, 1987, Section 5.7]

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 16



## Cone spectral sensitivity

- 3 Arten von Cones: L-, M-, S-Cones; steht für "long", "medium", "short" wavelength
- Jede Cone-Art hat eine eigene Empfindlichkeitskurve; Maxima entsprechen **ungefähr** Gelb, Grün, Blau
- Erstaunlich:
  - Manche Tiere sehen UV- oder IR-Licht
  - Der Fangschreckenkrebs hat 8 verschiedene Cones im sichtbaren Bereich und 4 im UV!
  - Hund und Katze haben nur 2 Cone-Arten (blau & rot)
  - Es gibt mögl.weise(!) **Tetrachromaten!**
    - (Wenn, dann nur Frauen ...)



Spectral Sensitivity of the L, M, and S Cones

S-cone response

M-cone response

Absorbance (normalized)

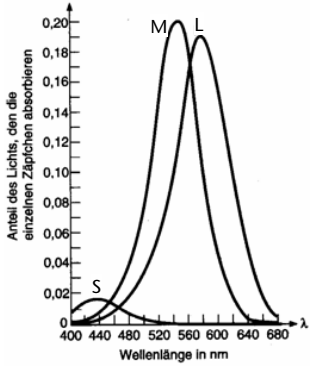
Wavelength (nm)

Animation

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 17

## Der wahrgenommene Stimulus

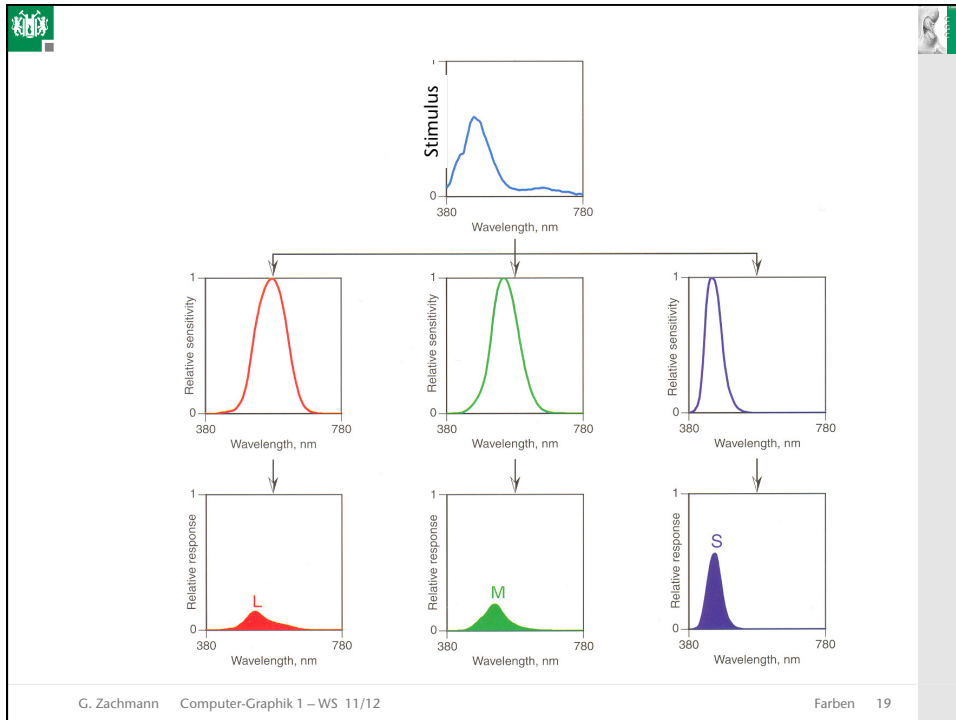
- Die "wahren" Empfindlichkeitskurven
- Der "Output" (*Response*) eines Cones:
  - Sei  $P(\lambda)$  das Spektrum des einfallenden Lichtes
  - Sei  $w(\lambda)$  die Empfindlichkeitskurve
  - Dann ist die Antwort des Cones:

$$\Phi = k \int_{380\text{nm}}^{780\text{nm}} w(\lambda) \cdot P(\lambda)$$


Anteil des Lichts, den die einzelnen Zapfchen absorbieren

Wellenlänge in nm

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 18



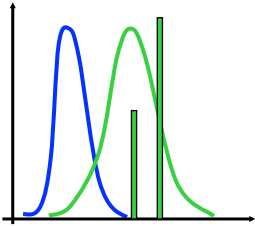
- Achtung: Cones können keine Farben "sehen"!
- Beispiel:
  - Verschiedene Wellenlänge, aber trotzdem gleiche Response
  - Wg. verschiedener Intensität
- Aber: mit mehr Cone-Arten kann man mehr Farben unterscheiden!
- Beispiel:
  - Stimulus wie oben
  - Verschiedene Cones haben verschiedene Response

The top graph shows the relative response of a single cone type (M) to monochromatic light of different wavelengths. The y-axis is 'relative response' (0 to 1.00) and the x-axis is 'wavelength' (400 to 700 nm). A vertical bar at 500 nm is labeled 'mono-chromatisches Licht'. The bottom graph shows the relative response of three cone types (S, M, L) to the same monochromatic light at 500 nm. The y-axis is 'relative response' (0.00 to 1.00) and the x-axis is 'wave length' (400 to 700 nm). The S-cone response is blue, the M-cone response is green, and the L-cone response is red.

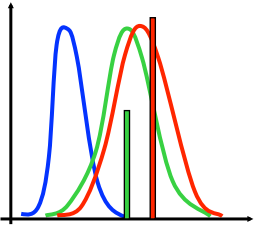
G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 20

## Farbenblindheit

- Klassischer Fall: eine Cones-Art fehlt
- Z.B.: "rote" Cones fehlen



Gleiche Response



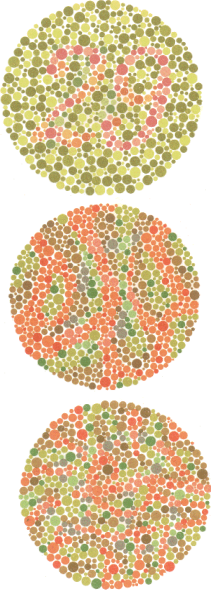
Wird differenziert

- Folge: Rot-Grün-Blindheit
- Häufigkeit:
  - 99% aller Farbsehschwächen, 10% aller Menschen sind rot-grün-blind
  - Davon 90% Männer, 10% Frauen

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 21

## Test zur Farbenblindheit

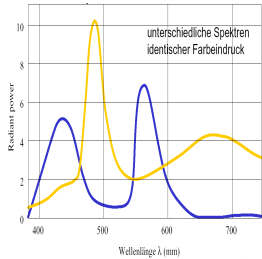
1. Beispiel:
  - Normalsichtige sehen hier "29"
  - Rot-grün-Blinde sehen hier "70"
2. Beispiel:
  - Normalsichtige sehen hier nichts
  - Rot-grün-Blinde sehen hier "5"
3. Beispiel:
  - Normalsichtige: nichts
  - Rot-grün-Blinde: eine Art Irrweg von links nach rechts



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 22

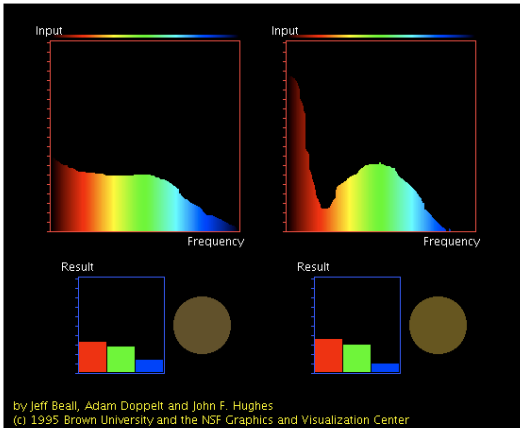
## Metamere

- Merke: wir sind alle "farbenblind"!!
- Man kann unendlich viele Paare von Spektren konstruieren, so daß die selbe Response für alle 3 Cones entsteht
- Solch ein Paar von Spektren heißt **Metamer**
- Hintergrund:
  - Die Menge aller Spektren ist ein unendlich-dim. Raum
  - Die Wahrnehmung durch 3 Sensor-Arten (Cones) stellt eine Projektion auf einen 3-dim. Raum dar!
  - Folge: man verliert Information
- Das Gute daran: nur so ist es möglich, mit nur 3 Primärfarben im Monitor (fast) alle Farbeindrücke zu "erzeugen", die wir sehen können!



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 23

## Applet



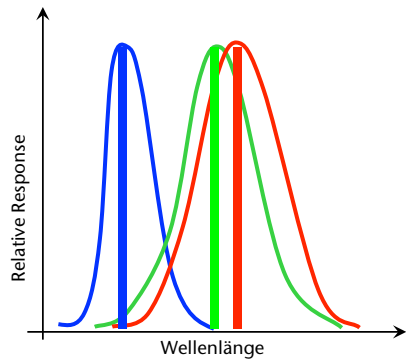
by Jeff Beall, Adam Doppelt and John F. Hughes  
(c) 1995 Brown University and the NSF Graphics and Visualization Center

[http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/catalogs/color\\_theory.html](http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/catalogs/color_theory.html)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 24

## Ein kleiner Trugschluss

- Man könnte folgende Idee haben:
  - Wähle Phosphore im Monitor so, daß diese genau eine Wellenlänge abstrahlen, die genau den Peaks der Empfindlichkeitskurven der menschlichen Cones entsprechen
- Leider: **DAS KLAPPT NICHT**

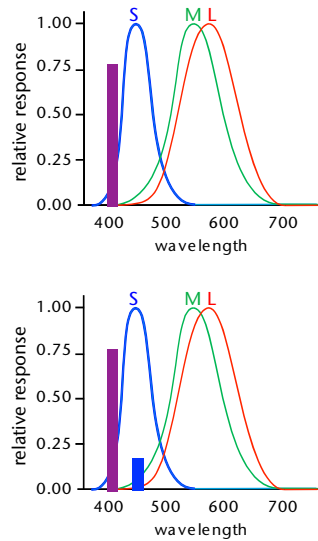


The graph shows three bell-shaped curves representing the relative response of human cones to different wavelengths. The x-axis is labeled 'Wellenlänge' (wavelength) and the y-axis is 'Relative Response'. The curves are labeled S (blue), M (green), and L (red). Vertical lines indicate the peaks of each curve, which do not align with the peaks of the other curves.

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 26

## Gegenbeispiel

- Versuche, folgenden Stimulus mit den 3 o.g. Spektren zu erzeugen:
  - Synthese: Integriere den geg. Stimulus mit den 3 Empfindlichkeitskurven
  - Ergibt hier: 0.2·S-Phosphor
  - Monitor: "S"-Pixel mit Stärke 0.2 anschalten
  - Analyse: im Auge werden die anderen beiden Cones **doch** erregt
  - Ergibt **andere** Farbe!
  - Grund: die Kurven überlappen sich, sind also **korreliert (gekoppelt)**!



The top graph shows the relative response of human cones (S, M, L) to different wavelengths. The x-axis is 'wavelength' (400-700 nm) and the y-axis is 'relative response' (0.00-1.00). The S curve (blue) peaks at ~440 nm, the M curve (green) at ~530 nm, and the L curve (red) at ~560 nm. A vertical purple bar is at 400 nm, and a blue bar is at 450 nm.

The bottom graph shows the same curves, but with a vertical purple bar at 400 nm and a blue bar at 450 nm.

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 27

## Entwicklung standardisierter Farbräume

- Quantitative und wiederholbare Bestimmung von Farben zwingend notwendig in vielen Industriezweigen:
  - Fernsehen, Druck, Farbenhersteller, Leuchtenhersteller, ...
- Wurde ca. 1920 begonnen von der CIE
  - = Commission Internationale de l'Eclairage
- Erster Standard-Farbraum 1931 von der CIE: CIEXYZ-Farbraum

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 28

## Linearkombinationen und Gleichheit von Lichtquellen

- Seien
 
$$s(\lambda), m(\lambda), l(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$
 die Response-Kurven der S-, M-, und L-Sensoren
- Annahme:
  - Wir leuchten mit 3 Primärlichtquellen R, G, B auf eine perfekt weiße, perfekt diffuse Fläche
  - Bei voller Leuchtstärke gelangen davon die Spektren
 
$$R(\lambda), G(\lambda), B(\lambda)$$
 ins Auge
  - Diese Spektren können "gedimmt" werden mit Skalaren
 
$$r, g, b \in [0, 1]$$
 (z.B. durch teilweise Abschattung)
- Welche Signalstärke kommt jeweils von den Sensoren ins Gehirn?

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 29

- Sei  $A$  das Misch-Spektrum von der weißen, diffusen Fläche:
 
$$A(\lambda) = r \cdot R(\lambda) + g \cdot G(\lambda) + b \cdot B(\lambda)$$
- Erinnerung: Sensoren liefern die "gewichtete Fläche"
- Sei  $S_A$  die Antwort des S-Sensors auf das Spektrum  $A$ :
 
$$\begin{aligned} S_A &= \int s(\lambda) A(\lambda) d\lambda \\ &= \int s(\lambda) (rR(\lambda) + gG(\lambda) + bB(\lambda)) d\lambda \\ &= r \int s(\lambda) R(\lambda) d\lambda + g \int s(\lambda) G(\lambda) d\lambda + b \int s(\lambda) B(\lambda) d\lambda \\ &= rS_R + gS_G + bS_B \end{aligned}$$
- Analog für  $M_A$  und  $L_A$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 30

- Zusammen:
 
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_A \\ M_A \\ L_A \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} S_R & S_G & S_B \\ M_R & M_G & M_B \\ L_R & L_G & L_B \end{pmatrix}}_M \cdot \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \\ &= M \cdot \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- Matrix  $M$  beschreibt also eine Art "Sensor-Abbildung", nämlich von den physikalischen Größen  $r, g, b$  (der "Skalierung" der Primärlichtquellen) auf die physiologischen Größen  $S_A, M_A, L_A$  (den Sensor-Outputs)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 31

- Bemerkung: die Matrix
 
$$M = \begin{pmatrix} S_R & S_G & S_B \\ M_R & M_G & M_B \\ L_R & L_G & L_B \end{pmatrix}$$
 ist (für ein bestimmtes Auge) konstant!
- Bemerkung: für eine bestimmte Sensorantwort ( $S_C, M_C, L_C$ ) ist die notwendige Skalierung  $r, g, b$  unserer (fest) gewählten Primärlichtquellen eindeutig bestimmt
  - Spektrum  $C$  und Spektrum  $r \cdot R + g \cdot G + b \cdot B$  sind **Metamere!**
  - Achtung: keine Garantie, daß diese  $r, g, b \in [0, 1]$  wären!!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 32

## Definition des Begriffs "Farbe"

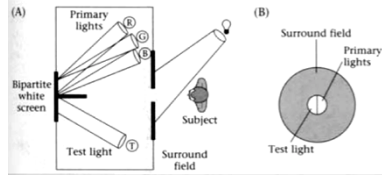
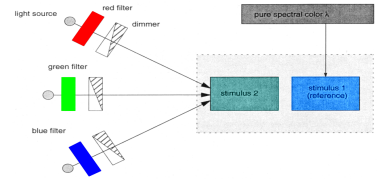
- Definition **Farbe**:  
Sei  $C$  eine Lichtquelle mit irgendeinem Spektrum.  
Mit der "**Farbe C**" meinen wir die Sensorantwort ( $S_C, M_C, L_C$ ),  
m.a.W., die **Farbe C** ist eigtl. nur eine **Kurzschreibweise** für den Vektor ( $S_C, M_C, L_C$ )!
- Mit dieser Kurzschreibweise kann man nun die vorige Formel
 
$$S_C = rS_R + gS_G + bS_B$$
 so schreiben:
 
$$C = rR + gG + bB$$
- **Achtung**:  $C, R, G$  und  $B$  sind hier in Wahrheit Sensor-Output-Vektoren, und das "=" ist in Wahrheit ein "=" zwischen Vektoren!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 33



## Das Grassmann'sche Farbmischexperiment [1853]

- Gegeben:
  - Primärlichtquellen  $R, G, B$
  - Monochromatische Testlichtquelle  $C_\lambda$  mit genau der Wellenlänge  $\lambda$
  - User soll mit den Reglern  $r, g, b$  die Farbe  $C_\lambda$  matchen, d.h.
 
$$C_\lambda = r_\lambda R + g_\lambda G + b_\lambda B$$
- Definition: die Werte  $r_\lambda, g_\lambda, b_\lambda$  nennt man **Tristimulus-Werte** (zu festgelegten  $R, G, B$  !)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Farben 35

- Beobachtung 1: Das geht mit (fast) allen  $C_\lambda$  (und Helligkeiten von  $C_\lambda$ ), vorausgesetzt:
  - $R, G, B$  sind halbwegs weit über das Spektrum verteilt; und
  - keine der 3 Primärfarben läßt sich durch Kombination der anderen beiden erzeugen
- Problem: man kann so **nicht alle** Farben erzeugen!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Farben 36

- Trick / Beobachtung: es klappt aber, wenn man zulässt, daß auch bei  $C_\lambda$  noch etwas von  $R, G, B$  beigemischt wird!
- M.a.W.:
 
$$C_\lambda = rR + gG + bB \quad \text{oder}$$

$$C_\lambda + rR = gG + bB \quad \text{oder}$$

$$C_\lambda + gG = rR + bB \quad \text{oder}$$

$$C_\lambda + bB = rR + gG$$
- Mathematische Schreibweise:
 
$$C_\lambda = -rR + gG + bB$$
- Achtung: solche negativen Koeffizienten haben keine physikalische Entsprechung! (man kann Licht nicht voneinander abziehen)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 37

### Beispiel

- Die CIE hat sehr viele Tests mit vielen Probanden (engl. *subjects*) gemacht
- Resultat bei monochromatischen Primärlichtquellen  $R_{700}, G_{546}, B_{436}$  (700, 546, 436 nm):  
*Beobachterfunktionen* (matching curves)  $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$

The graph plots Tristimulus values on the y-axis (ranging from -0.1 to 0.3) against Wavelength in nm on the x-axis (ranging from 380 to 780). Three curves are shown:  $\bar{b}$  (blue),  $\bar{g}$  (green), and  $\bar{r}$  (red).  $\bar{b}$  peaks at approximately 436 nm,  $\bar{g}$  at 546 nm, and  $\bar{r}$  at 700 nm. The  $\bar{r}$  curve shows a negative region between 400 and 500 nm.

- Leider: egal, welche Primärlichtquellen man wählt, eine der Kurven  $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$  wird immer irgendwo negativ

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 38

- Beobachtung 2: verdoppelt man die Intensität der Testlichtquelle  $C_\lambda$ , dann muß man auch die Intensität der Primärlichtquellen verdoppeln (indem man die Tristimulus-Werte verdoppelt), d.h.
 
$$2C_\lambda = (2r)R + (2g)G + (2b)B$$
- Beobachtung 3: 2 Primärfarben alleine genügen nicht
- Beobachtung 4: ändert man stetig die Intensität einer der 3 Primärlichtquellen und hält die beiden anderen fest, so ändert sich die Mischfarbe stetig

▪ Bemerkung: o.g. Beobachtungen sind eigtl. klar nach unseren Betrachtungen zur Linearkombination von Lichtquellen / Farben

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 39

## Die Grassmann'schen Gesetze

- Der (menschlich wahrnehmbare) Farbraum ist ein **stetiger, 3-dimensionaler Vektorraum** mit der Basis  $R, G, B$ , d.h.
 
$$\forall C : C = rR + gG + bB$$
- Die Gleichheits-Relation zwischen Farben ist **transitiv**, d.h.
 
$$C_1 = C_2 \wedge C_2 = C_3 \Rightarrow C_1 = C_3$$

und zwar völlig unabhängig von den Spektren der Lichtquellen, die die Stimulus-Vektoren  $C_1, C_2, C_3$  hervorgerufen haben.

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 40

## Exkurs: Prokudin-Gorskii

- Russischer Photograph um 1900
- Entwickelte Farb-Photoapparat und Farb-Projektor
  - 3 Einzelbilder rel. schnell hintereinander mit verschiedenen Farbfiltern









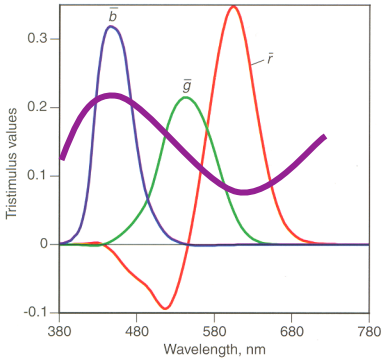


<http://www.loc.gov/exhibits/empire/>

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 41

## Was macht man mit den CIE-Kurven?

- Sei Spektrum  $X$  gegeben
- Berechne die Tristimulus-Werte mittels der 3 Kurven (multiplizieren & integrieren)
- Skaliere mit diesen 3 Werten die 3 Primärlichtquellen (700, 546, 436 nm)
- Man erhält ein Metamer zu  $X$  (die gleiche Farbe)
- Achtung: eine der 3 Tristimulus-Werte kann negativ sein!



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 42

## Farb-Basiswechsel

- Eine Folge der Grassmann'schen Gesetze:
  - Man kann (fast) jedes beliebige Tripel von Primärlichtquellen (= Basis) wählen
  - Hat man Farbe bzgl einer Basis gegeben, so kann man diese in jede andere Basis umrechnen (= Basistransformation)
- Beispiel:
  - Orig. Basis  $R, G, B$ , neue Basis  $U, V, W$ , wobei
 
$$U = u_1R + u_2G + u_3B, \quad V = \dots$$

m.a.W.

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 43

- Nun kann man die Farbe  $C$  vom RGB- in den UVW-Farbraum umrechnen:
 
$$C = uU + vV + wW = rR + gG + bB$$
- Also
 
$$C = (uvw) \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = (uvw)M \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = (rgb) \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

$$(uvw) = (rgb)M^{-1}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 44

## Der CIEXYZ-Farbraum

- Negative Tristimulus-Werte sind lästig!
- Ziel: ein Farbraum XYZ, so daß Tristimulus-Werte überall positiv
- Lösung: wähle geeignete , überall positive "Beobachterfunktionen" (*matching curves*), und damit (gedachte, hypothetische!) Primärlichtquellen
- Diese **Standard-Beobachter-Funktionen** sind:

CIE 1931 color matching functions

$$\begin{pmatrix} \bar{x}(\lambda) \\ \bar{y}(\lambda) \\ \bar{z}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.36 & -0.515 & 0.005 \\ -0.89 & 1.42 & 0.014 \\ -0.46 & 0.088 & 1.009 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}(\lambda) \\ \bar{g}(\lambda) \\ \bar{b}(\lambda) \end{pmatrix}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 45

- Nachteil: die zu den Beobachterkurven gehörigen, gedachten Primärspektren sind nicht mehr physikalisch realisierbar!
- Die Standard-Beobachterfunktionen wurden von der CIE tabellarisch festgelegt
- Damit kann man die Tristimulus-Werte ausrechnen:

$$X = k \int \bar{x}(\lambda) \cdot P(\lambda)$$

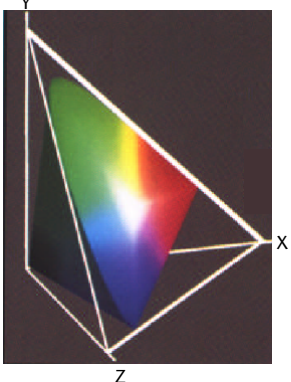
$$Y = k \int \bar{y}(\lambda) \cdot P(\lambda)$$

$$Z = k \int \bar{z}(\lambda) \cdot P(\lambda)$$

mit Normierungsfaktor  $k$  so, dass Weiß einen  $Y$ -Wert = 100 hat

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 46

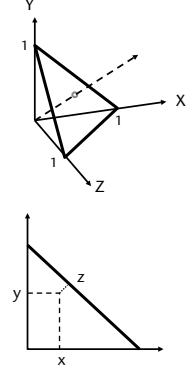
- Der Farbraum:
  - Achsen X, Y, Z
  - Weiterer Nachteil: nicht alle (positiven) Punkte entsprechen tatsächlich Farben!
- In der Praxis
  - liegt die XYZ-Spektralwertkurve tabellarisch für Standardbeobachter vor
  - wird  $P(\lambda)$  als Treppenfunktion aus Spektralbändern der Breite  $\Delta\lambda = 5-10$  nm approximiert
- Erinnerung: XYZ sind für alle Wellenlängen positiv
  - (Weil Beobachterkurven [*matching curves*] überall positiv sind, und physikalisches Spektrum sowieso.)



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 47

## Das CIE-Chromatizitätsdiagramm

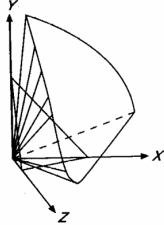
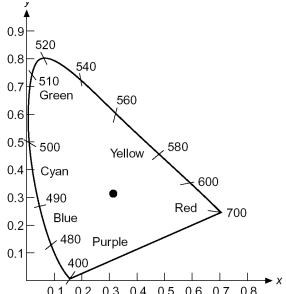
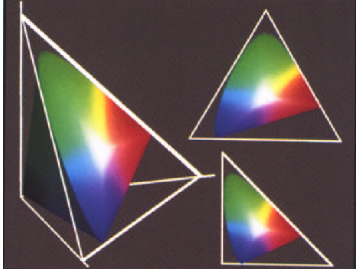
- Der XYZ-Raum ist unhandlich
- Beobachtung aus den Grassmann'schen Experimenten:
  - $(X, Y, Z)$  und  $(\alpha X, \alpha Y, \alpha Z)$ ,  $\alpha > 0$ , haben denselben Farbton (*hue*) und verschiedene Helligkeit (*luminance*)
- Oft interessiert nur der Farbton
- Lösung:
  1. Projektion auf Ebene  $X+Y+Z=1$ :
 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{X + Y + Z} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$
  2. Orthogonale Projektion auf XY-Ebene: da  $x+y+z=1$ , reicht die Angabe von  $(x, y)$



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 48

### Eigenschaften

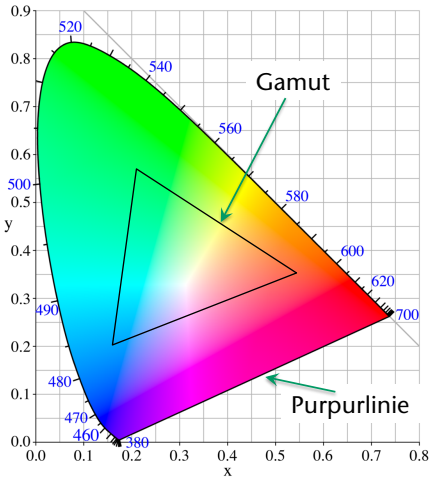
- $(X, Y, Z)$  und  $(\alpha X, \alpha Y, \alpha Z)$ ,  $\alpha > 0$ , haben dieselben Chromazitätskoordinaten  $(x, y)$
- Geraden in XYZ bleiben Geraden in  $xy$
- Die typ. "Hufeisenform" kommt von der Form der Beobachterkurven (*matching curves*)
- Reine Farben liegen auf dem Rand

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 50

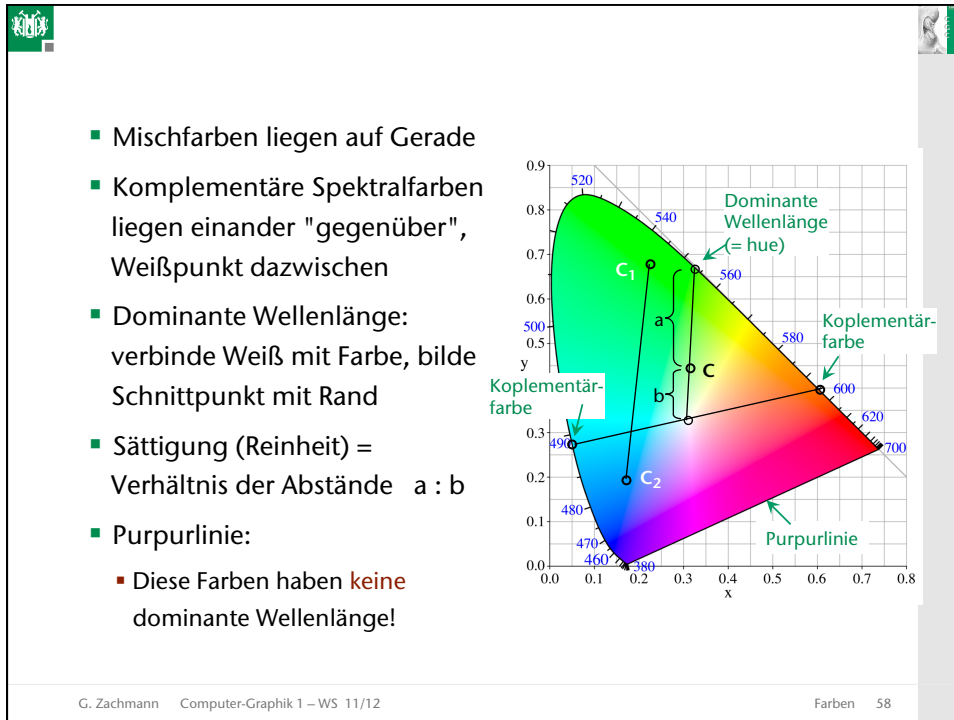
### Interpretation des Chroma-Diagramms

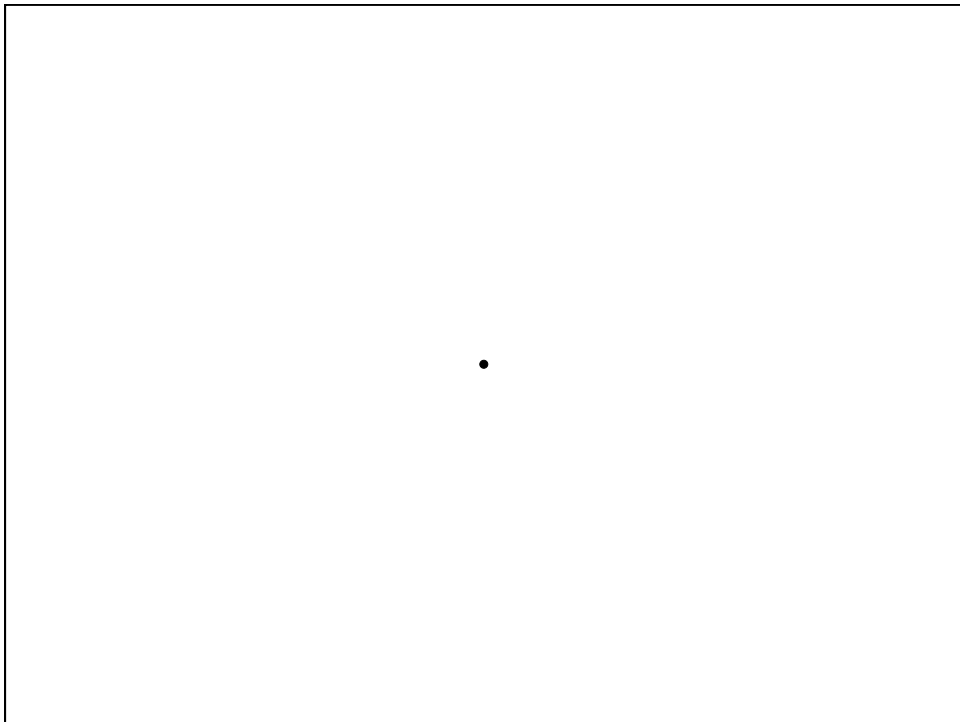
- Standard-Weiß C:  
 $x = y = z \approx 1/3$
- Achtung:
  - Kein Monitor/Drucker kann das Chroma-Diagramm korrekt darstellen!
  - Das schwarze Dreieck umreißt ungefähr alle diejenigen Farben, die der Monitor / Projektor darstellen kann!
  - Alle anderen Farben sind höchstwahrscheinlich falsch dargestellt!
  - Alle sichtbaren Farben sind Mischungen von mehreren Wellenlängen → liegen im Inneren



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 57







Bild



"Nachbild" (Afterimage)

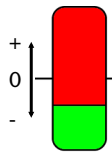
G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 61

The image shows two hexagons side-by-side, each composed of six triangles meeting at a central black dot. The left hexagon, labeled "Bild", has triangles in the following clockwise order from the top: yellow, red, pink, blue, green, and cyan. The right hexagon, labeled "'Nachbild' (Afterimage)", has triangles in the following clockwise order from the top: purple, cyan, green, yellow, red, and pink. The entire image is framed within a presentation slide that includes a small logo in the top-left corner and a vertical grey bar on the right side. At the bottom, there is a footer with the text "G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 61".

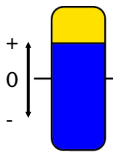
## Das Gegenfarbenmodell

- Helmholtz (u.a.) postulierte die **Tristimulus-Theorie**, d.h., das LMS- (RGB-) Farbmodell
- Etliche Phänomene konnte man damit nicht erklären
- Hering (1874) postulierte das **"Gegenfarbenmodell" (Opponent Colors)**

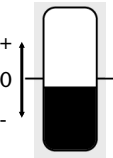





Rot/Grün-Rezeptor



Blau/Gelb-Rezeptor



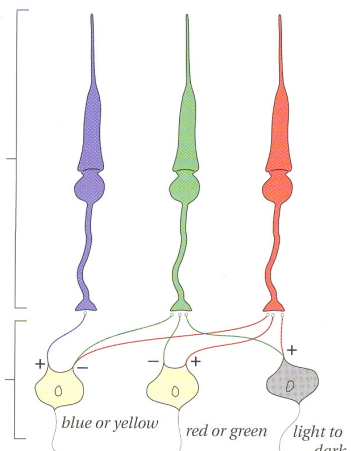
Schwarz/Weiß-Rezeptor

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 62

- Findet tatsächlich seine Entsprechung in einer "Verschaltung" direkt nach den Rezeptoren:
- Kann man auch einfach durch 3x3-Matrix abbilden (also ein Basiswechsel)

*First zone (or stage): layer of retina with three independent types of cones*

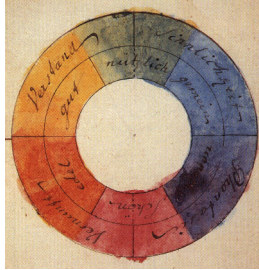
*Second zone (or stage): signals from cones either excite or inhibit second layer of neurons, producing opponent signals*



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 63

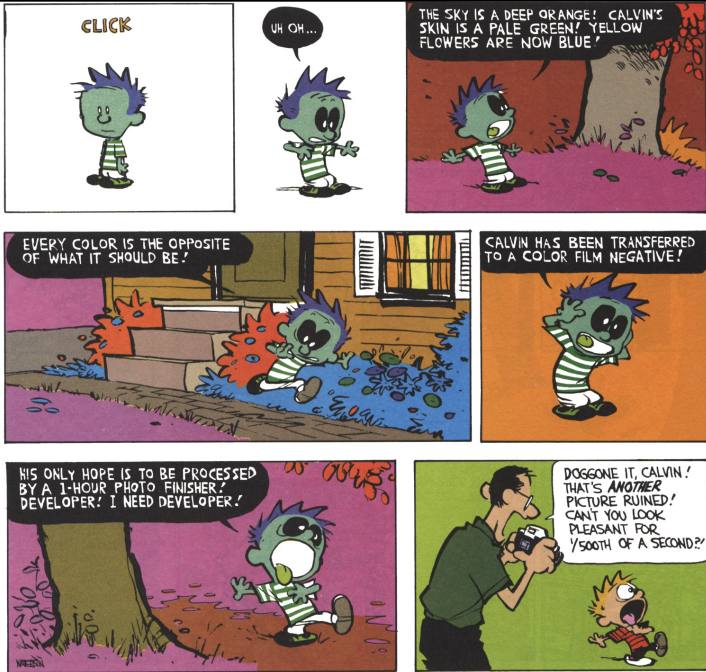
### Historische Randnotiz

- Gegenfarben und Kontraste schon von Leonardo da Vinci (1500) beschrieben.
- Farbkreis mit Gegenfarben von Isaac Newton (1672),
- Erweitert um subjektive/emotionale Wahrnehmung & Kontraste von Johann Wolfgang von Goethe (1810).



[Goethe, Farbenlehre, 1810]

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 64



**CLICK**

UH OH...

THE SKY IS A DEEP ORANGE! CALVIN'S SKIN IS A PALE GREEN! YELLOW FLOWERS ARE NOW BLUE!

EVERY COLOR IS THE OPPOSITE OF WHAT IT SHOULD BE!

CALVIN HAS BEEN TRANSFERRED TO A COLOR FILM NEGATIVE!

HIS ONLY HOPE IS TO BE PROCESSED BY A 1-HOUR PHOTO FINISHER. DEVELOPER? I NEED DEVELOPER!

DOGGONE IT, CALVIN! THAT'S *ANOTHER* PICTURE RUINED! CAN'T YOU LOOK PLEASANT FOR 1/500TH OF A SECOND?!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 65

## Ein kleines (kognitives) Experiment

- Lesen Sie folgende Farben (möglichst schnell) vor:

Introduction  
Background  
Theory  
Lemma  
Proof

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 66

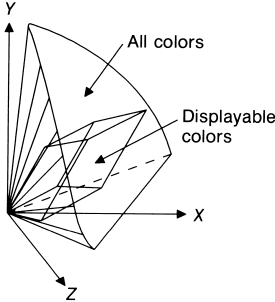
- Nun lesen Sie folgende Farben (möglichst schnell) vor:

Schwarz  
Rot  
Orange  
Gelb  
Blau

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 67

## Farbmodelle

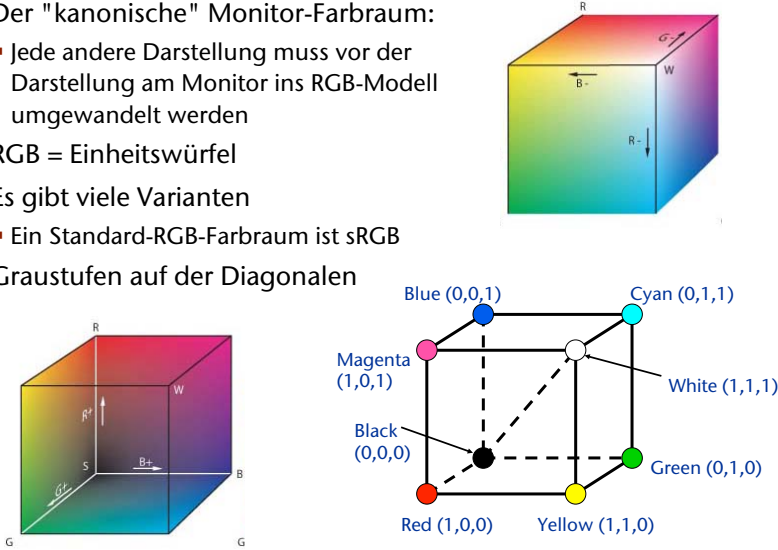
- XYZ ist zwar ein Standard, aber doch recht unpraktisch
- Je nach Aufgabe / Situation haben sich andere Farbmodelle bewährt
- **Hardwareorientiert:**
  - Geräte produzieren Farben durch Mischen von Grundfarben
  - RGB, CMY, YIQ, Yuv, ...
- **Wahrnehmungsorientiert:**
  - Wahrnehmungsempfinden des Menschen orientiert sich eher an den Parametern Farbton, Helligkeit und Sättigung
  - CIE Lab, HSV, HLS
- Immer eine Teilmenge des CIEXYZ-Raums



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 68

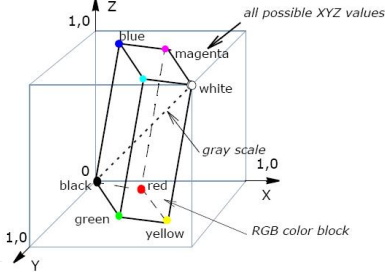
## RGB

- Der "kanonische" Monitor-Farbraum:
  - Jede andere Darstellung muss vor der Darstellung am Monitor ins RGB-Modell umgewandelt werden
- RGB = Einheitswürfel
- Es gibt viele Varianten
  - Ein Standard-RGB-Farbraum ist sRGB
- Graustufen auf der Diagonalen



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 69

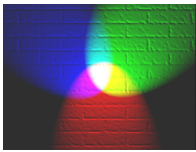


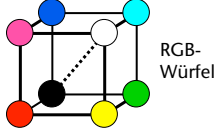
- Monitor-Hersteller geben i.a. Chromatizitäten der Phosphore und des "Weißpunktes" an:  $(x_r, y_r)$ ,  $(x_g, y_g)$ ,  $(x_b, y_b)$ ,  $(x_w, y_w)$ .
- Daraus kann man die lineare Transformation berechnen
- Für sRGB:
 
$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.241 & 1.537 & -0.497 \\ -0.969 & 1.876 & 0.042 \\ 0.056 & -0.204 & 1.057 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$
- Erinnerung: es können durchaus Werte außerhalb  $[0,1]$  rauskommen!
  - Führt zum großen Problem des "Gamut-Mapping" bzw. "Tone-Mapping"



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 70

## CMY / subtraktive Farbmischung

- Bislang immer **additive Farbmodelle** bzw. **additive Farbmischung**
  - "Addition" von "Farben" = Addition von Spektren
- Beobachtung: bei Überlagerung von Mal-Farben oder Farbfiltern passiert etwas anderes!
  - Warum sehen wir "Cyan", wenn wir die Malfarbe "Cyan" auf weißes Papier auftragen?

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 71

▪ Daraus ergibt sich folgende Tabelle:

Tinte	Absorbiert	Reflektiert	Erscheint
Cyan	Rot	Grün + Blau	Cyan
Magenta	Green	Rot + Blau	Magenta
Gelb	Blau	Rot + Grün	Gelb
Magenta + Gelb	Grün + Blau	Rot	Rot
Cyan + Gelb	Rot + Blau	Grün	Grün
Cyan + Magenta	Rot + Grün	Blau	Blau

▪ Folgerungen:

- Basis besteht aus Cyan, Magenta, Gelb → CMY
- "Addition" von Farben = Subtraktion von Spektren

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 72

▪ Umrechnung:

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$


- "Null"-Punkt = (0,0,0) = Weiß
- (1,1,1) = Schwarz

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Farben 73



## Erweiterung: CMYK

- Erweiterung des CMY-Modells
- K = Black
- Löst verschiedene Probleme:
  - C + M + Y ergibt kein perfektes Schwarz (eher schmutziges Braun)
  - Alle drei Farben übereinander drucken macht Papier sehr naß
  - Text ist i.a. schwarz →
    - würde Farben verschwenden
    - exakte Überlagerung schwierig (man denke an die Serifen)



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12

Farben 74